CAPÍTULO

3

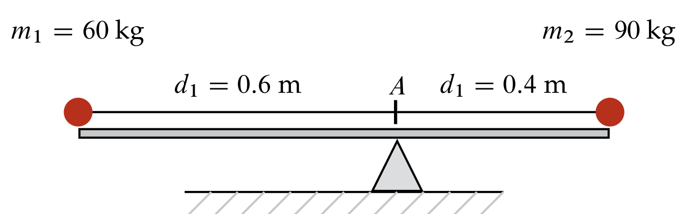
Aplicaciones de la integral

[1]

3.7 Momentos y centro de una masa

3.7.1 Centro de masa de un sistema unidimensional

Considerar el sistema unidimensional, tal como se muestra en la siguiente figura, formado por una varilla (de masa despreciable) y las masas m_1 & m_2.



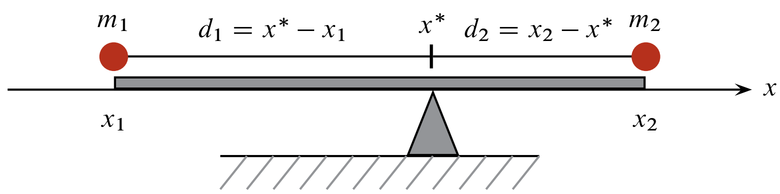
Como se puede apreciar, la varilla tiene una longitud de un metro y se encuentra apoyada en el punto A. En un extremo se encuentra la masa m_1 y en el otro la masa m_2 a una distancia de 0.6 m y 0.4 de A, respectivamente.
La varilla se encuentra en equilibrio lo cual implica que se cumple:

$$(m_1)(d_1) = (m_2)(d_2) \qquad \text{(ley de la Palanca)}$$

Se dice que el punto A sobre la varilla es el centro de masa del sistema unidimensional formado por las masas y la varilla.
Cuando se tiene una masa en cada uno de los extremos de una varilla, ¿cómo se determina el centro de masa del sistema? En otras palabras, ¿dónde debe estar el punto sobre la varilla para que se logre el equilibrio del sistema?

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Considérese el eje horizontal x como eje de referencia y la varilla a lo largo de este, como se muestra en la siguiente figura:



Tal como se indicó anteriormente, para que el sistema en cuestión se encuentre en equilibrio se debe cumplir:

$$(m_1)(d_1) = (m_2)(d_2) \;\Rightarrow\; (m_1)(x^* - x_1) = (m_2)(x_2 - x^*).$$

De esta última igualdad se puede despejar x^* que representa el centro de masa del sistema, es decir,

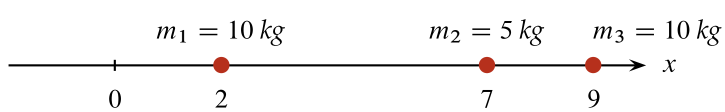
$$m_1x^* - m_1x_1 = m_2x_2 - m_2x^* \;\Rightarrow\; m_1x^* + m_2x^* = m_1x_1 + m_2x_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Si se tiene un sistema unidimensional formado por las masas m_1, m_2, m_3 ubicadas en x_1, x_2, x_3, respectivamente, la expresión para calcular el centro de masa x^* es la siguiente:

$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Ejemplo 3.7.1 *Encontrar el centro de masa del siguiente sistema.*



▼ En este ejercicio, el centro de masa del sistema formado por las tres particulas se obtiene al utilizar la información conocida en la expresión:

$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Esto es:

$$x^* = \frac{(10)(2) + (5)(7) + (10)(9)}{10 + 5 + 10} = 5.8\,.$$

□

Generalizando, si se tiene un sistema formado por un conjunto de n partículas con masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, ubicadas sobre un eje de referencia x en los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, respectivamente, el centro de masa x^* del sistema se calcula con la expresión:

$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Cada uno de los términos $m_i x_i$ del numerador se conoce como el momento de la masa m_i con respecto del origen. En este sentido el numerador representa la suma de cada uno de los momentos.

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i .$$

A M se suele llamar momento del sistema con respecto del origen.
Por otra parte, el denominador de la expresión representa la masa m total del sistema, esto es:

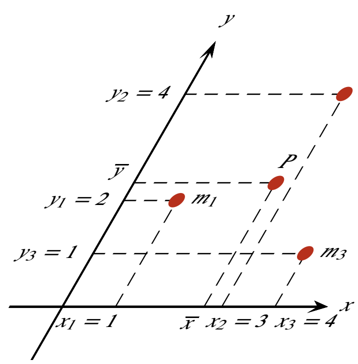
$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Considerando lo anterior:

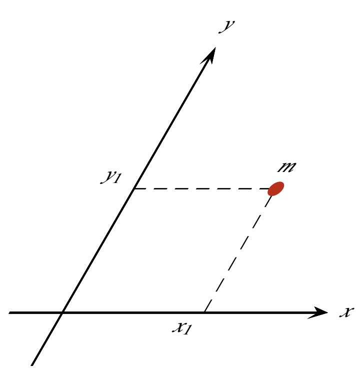
$$x^* = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M}{m}.$$

3.7.2 Centro de masa de un sistema bidimensional

Considerar las 3 masas, representadas puntualmente en el plano xy, que se muestran en la siguiente figura:



Considere también que $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ kg. En este caso se trata de un sistema bidimensional cuyo centro de masa es el punto P con coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$.
En el caso de un sistema bidimensional, una masa m tiene un momento con respecto a cada eje.



El momento de la masa m con respecto al eje x es

$$M_x = (m)(y_1).$$

El momento de la masa m con respecto al eje y es

$$M_y = (m)(x_1).$$

Para el cálculo de las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa del sistema, se procede de la siguiente manera:

$$\overline{y} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa del sistema}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i};$$

$$\overline{x} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje y}}{\text{masa del sistema}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}.$$

Considerando lo anterior:

$$\overline{y} = \frac{(2)(2) + (2)(4) + (2)(1)}{2 + 2 + 2} = \frac{7}{3} \approx 2.33;$$

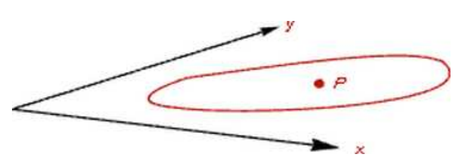
$$\overline{x} = \frac{(2)(1) + (2)(3) + (2)(4)}{2 + 2 + 2} = \frac{8}{3} \approx 2.67.$$

Para un sistema formado por un conjunto de n partículas con masas m_1, m_2, m_3, $\ldots$, m_n ubicadas sobre un plano de referencia xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$, respectivamente, el centro de masa del sistema es el punto P sobre el plano con coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$, las cuales se calculan con las siguientes expresiones:

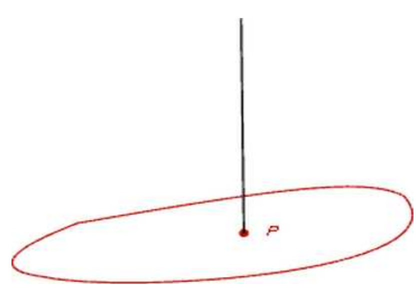
$$\overline{x} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } y}{\text{masa del sistema}} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

$$\overline{y} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa del sistema}} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

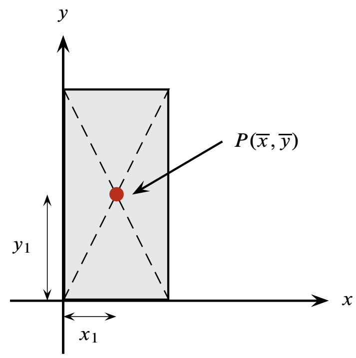
Una lámina plana y delgada como la mostrada en la figura, representa un sistema bidimensional:



El punto P es su centro de masa. Si la lámina está suspendida del punto P, estaría balanceada horizontalmente. En este sentido, se considera que el centro de masa de la lámina es su punto de equilibrio.

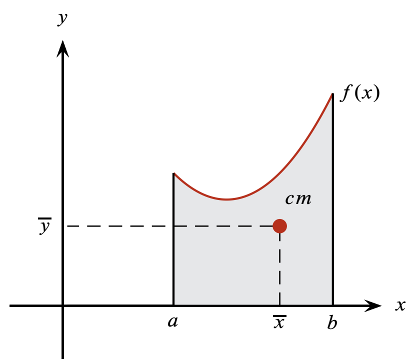


El punto P es donde se concentra la fuerza de gravedad, esto es, la fuerza de atracción que experimentan lo objetos debida a la gravedad. Es por esto por lo que también este punto es llamado centro de gravedad. Una lámina rectangular con masa m y densidad constante tiene su centro de masa en el centro de la figura. Se trata de un sistema bidimensional cuyo centro de masa es el punto P, con coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$.

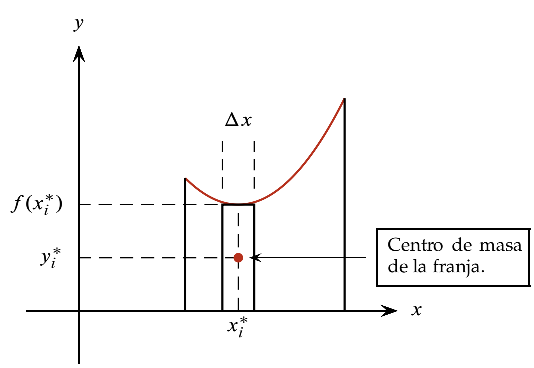


$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(m)(x_1)}{m} = x_1;$$
$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(m)(y_1)}{m} = y_1.$$

A continuación se describe cómo hallar el centro de masa de una placa delgada de forma irregular. Considerar la placa con densidad constante δ que se muestra a continuación en el plano xy:



Como se puede puede apreciar, la placa está delimitada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y por la gráfica de la función $f(x)$ [continua en (a, b)]. ¿Cómo calcular las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa (cm) de la placa?
Para resolver este problema se divide la superficie de la lámina en n franjas verticales de igual anchura Δx. Observar una de estas franjas mostrada en el siguiente plano:



El centro de masa de la franja vertical, con coordenadas x_i^* & y_i^*, se encuentra en el centro de esta. El ancho de la franja es Δx y su longitud, $f(x_i^*)$. Entonces:

$$\text{Área de la franja:} \quad \Delta_i A = f(x_i^*)\Delta x;$$
$$\text{Masa de la franja:} \quad \Delta_i m = \delta \Delta_i A = \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

Para un número n de franjas verticales, la masa M de la placa es

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

Se obtiene una mejor aproximación de M si el número n de franjas tiende a infinito y las Δx tienden a cero. Esto es:

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

Por lo estudiado anteriormente:

$$M = \int_a^b \delta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$x_i^* \Delta_i m = x_i^* \delta f(x_i^*)\Delta x;$$

el momento de la lámina con respecto al eje y es

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^* \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

También:

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^* \delta f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b \delta x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

El momento de la franja con respecto al eje x es

$$y_i^* \Delta_i m = \frac{f(x_i^*)}{2}\Delta_i m = \frac{f(x_i^*)}{2}\delta f(x_i^*)\Delta x = \frac{\delta}{2}[f(x_i^*)]^2\Delta x;$$

el momento de la lámina con respecto al eje x es

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2}[f(x_i^*)]^2\Delta x.$$

Como en las explicaciones anteriores:

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2}[f(x_i^*)]^2\Delta x = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

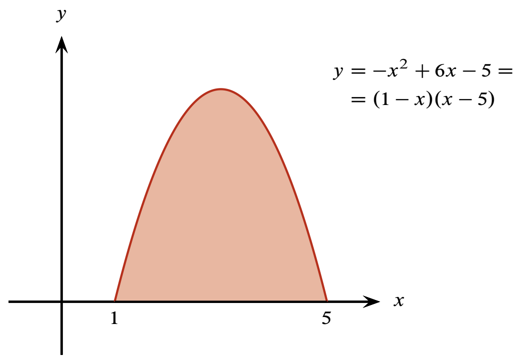
Por último, las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa de la lámina con densidad constante δ son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b \delta x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta f(x)\,\mathrm{d}x};$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \frac{\delta}{2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.7.2 *Determinar el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ, cuya superficie está delimitada por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y el eje x del plano cartesiano ($y = 0$).*

▼ Para resolver este problema, se aplican las expresiones (3.1) obtenidas anteriormente para el cálculo de las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa de un sistema bidimensional.
La región ocupada por la placa delgada se presenta en la figura siguiente:



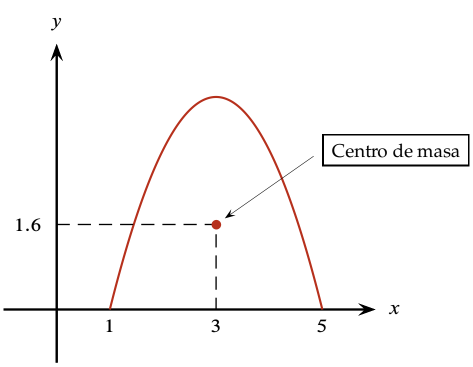
Las coordenadas del centro de masa son:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_1^5 \delta x(-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 \delta(-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x} = \frac{\delta\displaystyle\int_1^5 (-x^3+6x^2-5x)\,\mathrm{d}x}{\delta\displaystyle\int_1^5 (-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_1^5 (-x^3+6x^2-5x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 (-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\left(-\dfrac{x^4}{4} + 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_1^5}{\left(-\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Bigg|_1^5} = \frac{32}{\dfrac{32}{3}} = 3.$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_1^5 \frac{\delta}{2}(-x^2+6x-5)^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 \delta(-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\delta}{2}\displaystyle\int_1^5 (-x^2+6x-5)^2\,\mathrm{d}x}{\delta\displaystyle\int_1^5 (-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_1^5 (-x^2+6x-5)^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 (-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x} =$$

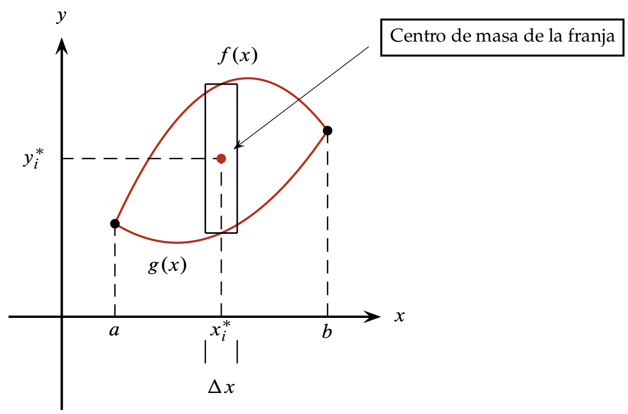
$$= \frac{1}{2}\frac{\dfrac{512}{15}}{\dfrac{32}{3}} = \frac{8}{5} = 1.6.$$



□

3.7.3 Centro de masa de una placa delimitada entre dos curvas

Consideramos que se tiene una placa delgada que ocupa una región en el plano delimitada por la gráfica de dos funciones, tal como se muestra a continuación:



Observamos que el ancho de la franja mostrada es $\Delta_i x$ y su largo es $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Se tiene entonces lo siguiente:

Área de la franja:	$\Delta_i A = \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x;$
Masa de la franja:	$\Delta_i m = \delta \Delta_i A = \delta \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x.$

Es importante observar:

$$y_i^* = \frac{f(x_i^*) + g(x_i^*)}{2}.$$

Considerando lo anterior, la masa de la placa es

$$M = \int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\; \mathrm{d}x.$$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int_a^b x\,[\delta(f(x) - g(x))]\; \mathrm{d}x = \int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\; \mathrm{d}x.$$

El momento de la placa con respecto al eje x es

$$M_x = \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right] [\delta(f(x) - g(x))]\; \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\delta}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right] \mathrm{d}x.$$

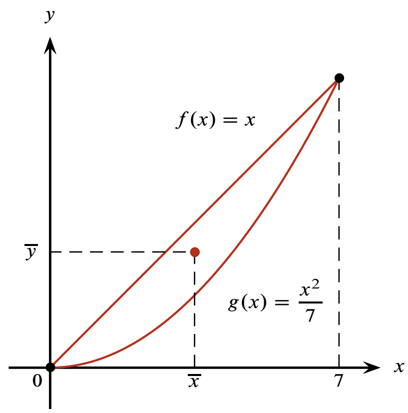
Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\; \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\; \mathrm{d}x};$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{\delta}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\; \mathrm{d}x}.$$

Ejemplo 3.7.3 *Determinar las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa de una lámina plana delgada con la forma de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{7}$.*

▼ La región delimitada por las dos funciones se muestra a continuación.



En este caso $f(x) \geq g(x)$ en $[0, 7]$. Las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^7 \delta x \left[x - \frac{x^2}{7}\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^7 \delta \left[x - \frac{x^2}{7}\right] \mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^7 \left[x^2 - \frac{x^3}{7}\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^7 \left[x - \frac{x^2}{7}\right] \mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{28}\right)\Bigg|_0^7}{\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{21}\right)\Bigg|_0^7} = \frac{\dfrac{343}{12}}{\dfrac{49}{6}} = \frac{343}{98} = 3.5.$$

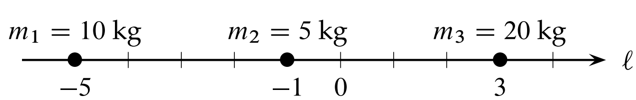
$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{\delta}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^7 \frac{\delta}{2}\left[(x)^2 - \left(\frac{x^2}{7}\right)^2\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^7 \delta \left[x - \frac{x^2}{7}\right] \mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\delta}{2}\displaystyle\int_0^7 \left[x^2 - \frac{x^4}{49}\right] \mathrm{d}x}{\delta \displaystyle\int_0^7 \left[x - \frac{x^2}{7}\right] \mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5 \cdot 49}\right)\Bigg|_0^7}{\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{21}\right)\Bigg|_0^7} = \frac{\dfrac{343}{15}}{\dfrac{49}{6}} = \frac{343 \cdot 6}{49 \cdot 15} = 2.8.$$

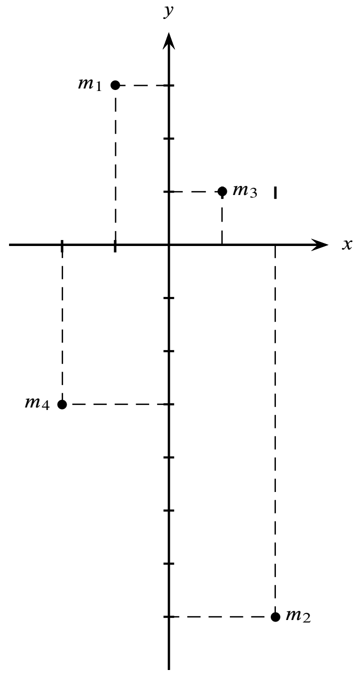
□

Ejercicios 3.7.1 *Momento.* *Soluciones en la página 11*

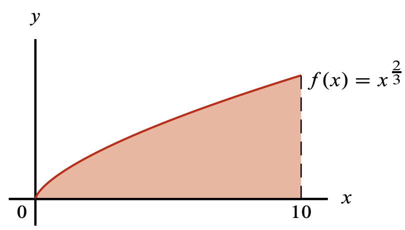
1. Encontrar el centro de masa del sistema formado por tres masas representadas puntualmente sobre la recta ℓ:



2. Encuentre el centro de masa del sistema formado por las masas puntuales $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg, $m_3 = 7$ kg & $m_4 = 5$ kg que se encuentran localizadas en un plano cartesiano, en los puntos $P(-1, 3)$, $P_2(2, -7)$, $P_3(1, 1)$ & $P_4(-2, -3)$, respectivamente.



3. Para la lámina que se muestra en la figura (con densidad constante), determinar las coordenadas de su centro de masa.



4. Determine las coordenadas del centro de la región delimitada por las curvas $y = x$, $y = x^2 - 6$ & $x = 0$.

5. Encontrar el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina de densidad uniforme ρ delimitada por las gráficas de $f(x) = x$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

6. Encontrar el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina de densidad uniforme ρ delimitada por las gráficas de $f(x) = x^2$ & $g(x) = \sqrt{x}$.

7. Encontrar el centro de masa de una placa semicircular de radio 5 (placa con densidad ρ uniforme).

8. Para una lámina con densidad constante ρ, acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 1$ & $g(x) = -x^2 + 5x + 1$, encontrar el centro de masa.

9. Considerar una lámina con densidad constante ρ acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = e^x$ & $g(x) = 1$ en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar el centro de masa de la lámina.

10. Encontrar el centro de masa de una lámina (con densidad uniforme) delimitada por la gráfica de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ & $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Ejercicios 3.7.1 *Momento.* *Preguntas, página 9*

1. $x^* = \dfrac{1}{7}$.
2. $\overline{x} = -\dfrac{1}{4}; \overline{y} = -\dfrac{3}{8}$.
3. $\bar{x} = \dfrac{25}{4}; \bar{y} = \dfrac{5\sqrt[3]{5^2}}{7 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$.
4. $\overline{x} \approx 1.17; \overline{y} \approx -1.47$.
5. $\bar{x} = \dfrac{3}{2}; \bar{y} = \dfrac{6}{5}$.
6. $\bar{x} = \dfrac{9}{20}; \bar{y} = \dfrac{9}{20}$.
7. $\bar{x} = 0; \bar{y} = \dfrac{20}{3\pi}$.
8. $\bar{x} = 2.5; \bar{y} = 1$.
9. $\bar{x} = \dfrac{-1+e^2}{e^2-3}; \bar{y} = \dfrac{e^4-5}{4\left(e^2-3\right)}$.
10. $\bar{x} = \dfrac{\pi\sqrt{2}-4}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}; \bar{y} = \dfrac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$.