Inducción matemática.

(1) Demuestre por inducción:

(a) $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ si $a \neq 1$

(b) $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 \cdots + 3 \cdot 5^n = \dfrac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$

(c) $2 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 - \cdots + 2 \cdot (-7)^n = \dfrac{1 - (-7)^{n+1}}{4}$

(d) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(g) $3^n < n!$ si $n > 6$.

(h) $2^n > n^2$ si $n > 4$

(i) $n! < n^n$ si $n > 1$

(j) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(k) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(l) $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \dfrac{1}{n}$

(m) 3 divide $n^3 + 2n$

(n) 3 divide $n^4 - 4n^2$ si $n \geq 2$

(o) 3 divide $2^n \times 2^n - 1$

(p) 5 divide $n^5 - n$

(q) 6 divide $n^3 - n$

(r) $n^2 - 7n + 12 \geq 0$ si $n > 3$

(s) Si $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$

(t) Si A es un conjunto con n elementos entonces existen $\dfrac{n(n-1)}{2}$ subconjuntos con dos elementos, si $n > 1$.

(2) ¿Se cumple $n^2 \leq n!$?

(3) ¿Se cumple $2n + 3 \leq 2^n$?

[100] canek.azc.uam.mx: 25/ 9/ 2006